Ist $\sqrt{4}$ wirklich ± 2 ? — Und andere Probleme mit Wurzeln im Mathematikunterricht

Hans-Christian Reichel, Univ. Wien

A. Einleitung. Vielleicht muß ich mich entschuldigen, daß ich heute nichts „Anspruchsvolleres" referiere, das Thema entspricht aber der konkreten Arbeit in der Schule und ist in Wahrheit sehr komplex. (Frau Kollegin Goack vom Privatgymnasium in der Kenyongasse rief mich eines Abends an und brachte mich anhand konkreter Fragen und Probleme mit Schülern einer 4. Klasse auf dieses Thema.)

Formulierungen wie $\sqrt{4} = \pm 2$ und ähnliche finden sich in praktisch allen Heften. Natürlich kann man dann fragen: „Ist $\sqrt{4} = +2$ *und* $\sqrt{4} = -2$, ist also $\sqrt{4}$ ‚zweiwertig'?" „Oder gilt $\sqrt{4} = +2$ *oder* $\sqrt{4} = -2$, je nach dem, was gerade paßt?" Eines wird dann quasi eingeklammert und gilt für den Augenblick eben nicht. — Freilich müßte es dann ebenso $\sqrt{-1} = \pm i$ lauten, das aber habe ich noch in keinem Heft gesehen (Gott sei Dank).

Ähnlich etwa folgendes Problem, dem die an mich gerichtete Frage eigentlich galt: In der vierten Klasse lernen wir, daß Quadrieren und Wurzelziehen inverse Operationen sind.

Als Formel geschrieben: $(\sqrt{a})^2 = a$ und $\sqrt{a^2} = a$; bzw. so: $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$.

— Und daraus folgt $\sqrt{(-7)^2} = -7$, andererseits aber $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$. (Wieder einmal gilt: der Gebildete sieht Probleme, wo der Oberflächliche nur Ungereimtheiten sieht!)

Ähnlich dann in der 7. Klasse: $\sqrt{-1} = i \leftrightarrow i^2 = -1$. Warum dann aber nicht: $i^2 = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$?

Vielleicht sagen Sie: derartige Probleme treten bei Schülern nie wirklich auf! Aber: wissen die Schüler, was dahinter steckt, oder befolgen sie wie so oft nur einfach „Spielregeln", wobei „gute" Schüler dann eben vielleicht noch besser wissen, was der Lehrer will? Stichwort: Unterricht als Spiel mit (unausgesprochenen) Regeln, die die Schüler mehr oder weniger gut „erkennen" und darauf eingehen.

Auch das folgende Problem wird mancher Schüler (etwa der 6. Klasse) nicht völlig aufklären können:

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2 \quad (???)$$

Natürlich könnte man sagen: „Die üblichen Rechenregeln gelten hier eben nicht. So *darf* man eben nicht rechnen (und damit basta)." Andererseits werden Sie meiner Forderung zustimmen, daß bei Schülern natürlich nicht der Eindruck entstehen sollte, die Mathematik sei vor allem ein System von Formeln und Regeln, die manchmal passen und manchmal nicht, und der Mathematiker wisse einfach, wo sie gelten und wo nicht. —

In Wahrheit aber liegt hier — wie so oft — ein (möglicherweise) verstecktes *Begriffsproblem* vor. Was ist die n-te Wurzel einer Zahl a?, und: welche Zahlen *haben* n-te Wurzeln?

Allgemein gesprochen geht es um das sinnvolle Definieren. Um einen bestimmten Zweck zu erreichen, soll ein Begriff definiert werden. Die zunächst ganz einfache Definition enthält aber — zunächst vielleicht verborgene — Widersprüche und Ungereimtheiten. Wie kann das vermieden werden? (Wieder einmal ein Aspekt der Allgemeinbildung, wo die Mathematik sinnvolles Medium der Vermittlung sein kann!)

Gibt es also Probleme mit Wurzeln im Unterricht, oder gibt es sie nicht? Wo und unter welchen Gesichtspunkten treten Wurzeln überhaupt im Unterricht auf? Und was ist der mathematische Hintergrund? — Vorweg vielleicht eines: Wurzeln treten natürlich bei praktischen Aufgaben, bei Textgleichungen, etc. auf, ihre didaktische Bedeutung aber liegt im Theoretischen. Wurzeln bieten (in der Unter- und Mittelstufe) wahrscheinlich die einzige Gelegenheit, irrationale Zahlen zu „verstehen", und aus diesem Blickwinkel sind sie ein wichtiger Schritt zum Verständnis der reellen Zahlen und des Zahlbegriffes überhaupt. (Desgleichen — und erst recht — bei den komplexen Zahlen! Siehe weiter unten!) Und das ist gerade heute, wo mit dem Taschenrechner (TR) und dem PC — stets also mit rationalen Zahlen — gerechnet wird, sehr wichtig. In [LHRLG4] z.B. wird dieser Aspekt sehr bald nach dem ersten Auftreten von Quadratwurzeln in der 4. Klasse gebracht. Der Succus ist dort etwa der folgende:

Berechnen wir z.B. $\sqrt{32}$ mit dem TR! (TR und Wurzeltaste sind den Schülern ja lange bekannt, warum sollte man dies nicht didaktisch nützen?)

Zuerst raten ($5 < \sqrt{32} < 6$), dann ablesen: der TR zeigt eine endliche Dezimalzahl: 5,656854249, die keine offenbaren Besonderheiten aufweist. Schreiben wir diese Zahl auf, tippen wir sie nochmals ein und quadrieren wir! Es kommt nicht 32 heraus (31,99999999). (Wenn wir übrigens gleich quadrieren, ohne aufzuschreiben und wieder einzutippen, kommt sehr wohl 32 heraus! Der TR rechnet nämlich mit mehr Stellen als er anzeigt (Schutzstellen) und rundet dann.) — Nun, die übliche Überlegung mit der Multiplikation von Dezimalzahlen zeigt: die ganze Zahl 32 kann nicht Produkt von „echten" endlichen Dezimalzahlen sein. Klar! ([LHRLG4], p. 19 ff.). $\sqrt{32}$ kann aber nun auch nicht periodisch sein, denn jede periodische Zahl ist rational, und wäre $\sqrt{32} = \frac{m}{n}$ (m und n teilerfremd, $n > 1$), so wäre $32 = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}$ auch nicht weiter kürzbar; wegen $n^2 > 1$ und $32 \in \mathbb{Z}$ ein Widerspruch! — Somit ergibt sich letztlich ([LHRLG4]):

Satz. *Die Quadratwurzel jeder natürlichen Zahl a, die keine Quadratzahl*[1] *ist, ist irrational (und daher stets nur als Näherungswert berechenbar).*

Quadratwurzeln haben also enge Beziehungen zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, was wir weiter unten noch viel deutlicher sehen werden. (Was könnte aber „Vollständigkeit von $\mathbb{R}$" in der 4. Klasse bedeuten? Wirklich thematisiert wird sie ja erst in der 6. Klasse (s. z.B. [RMHL]).) Immerhin aber können die Schüler zu diesem Zeitpunkt $\sqrt{32}$ mittels Pythagoras als *Punkt* auf der Zahlengeraden konstruieren, sie sehen also, daß diese Zahlengerade auch andere als nur die Bruchzahlen enthält. Umgekehrt zeigt das — anhand der Wurzel-Schätzungen eingeführte — Prinzip der Intervallschachtelung, daß jedem Punkt der Zahlengerade eine (u.U. unendliche, auch nicht-periodische) De-

[1] a heißt Quadratzahl, wenn es eine natürliche Zahl n gibt mit $n^2 = a$.

zimalzahl entspricht. Und es genügt der Hinweis, daß die rationalen Zahlen zusammen mit den irrationalen die Zahlengerade „vollständig ausfüllen".

Doch nun endlich zurück zum Thema des Vortrages:

B. Definition und Existenz von (n-ten) Wurzeln reeller Zahlen.

Nach einigen Rechenübungen mit (zunächst „naiv" eingeführten) Wurzeln wird man die Frage nach Definition und nach Rechenregeln aufwerfen und die theoretischen Aspekte mehr in den Vordergrund stellen (vgl. z.B. [LHRLG4]).

DEFINITION. Die Zahl x heißt Quadratwurzel der Zahl $a \geq 0$, wenn $x \geq 0$ und $x^2 = a$ ist.

Die Frage, ob beliebige (reelle) Zahlen $a \geq 0$ überhaupt Quadratwurzeln haben, entsteht im Mathematikunterricht (MU) dieser Stufe wahrscheinlich nicht, und zwar wegen der reichlich zur Verfügung stehenden Beispiele und wegen des TR. (M.E. ist sie für diese Stufe auch inadequat. Das Handeln (Rechnen) und ein gewisses intuitives „Verständnis" ist zunächst die Devise! *A. Kirsch* „definiert" die Zielsetzung des MU ganz allgemein durch „Verständige Handhabung und angemessene Vorstellungen".)

Wesentlich hiefür ist hier: Wurzelziehen ist (im Reellen) nur für nicht-negative Radikanden möglich (klar) und das Wurzelziehen ist die Umkehrung des Quadrierens: $(\sqrt{a})^2 = a$ und $\sqrt{a^2} = a$, wobei *diese* Gleichung aber *nur* für $a \geq 0$ gilt. (Die Wurzel jeder Zahl ist ≥ 0, $\sqrt{(-1)^2}$ ist also $+1$ und *nicht* -1. — Der Mathematiker natürlich schreibt $\sqrt{a^2} = |a|$ und sieht gar nicht, daß hier ein didaktisches Problem liegen kann! Der Didaktiker sieht Probleme, wo der Mathematiker oft keine sieht!)

Es ist also $\sqrt{4}$ immer nur $+2$, niemals aber -2. Ganz unsinnig ist eine „Gleichung" der Form $\sqrt{4} = \pm 2$. Natürlich aber hat die Gleichung $x^2 - 4 = 0$ zwei Lösungen: 2 und -2. (Das Wort „unsinnig" entstammt übrigens einem der wohl heute gängigsten und besten Lehrbücher der Analysis [HE].) —$\sqrt{a}$ hat — wenn überhaupt — im Reellen ***nur einen*** einzigen Wert!

n-te Wurzeln und ihre Rechenregeln

Auch $\sqrt[n]{a}$ ist nur für nicht-negative a definiert und $x = \sqrt[n]{a}$ ist dann stets ≥ 0. Die Schreibweise $\sqrt[3]{-8} = -2$ ist also im Grunde unzulässig und ist allenfalls ein typischer Fall dafür, daß es (übrigens in vielen Bereichen der Mathematik) Schreibweisen gibt, die unzulässig — ja im Grunde vielfach falsch — sind, die aber für den, der über die Hintergründe genau Bescheid weiß, eine sinnvolle Aussage andeuten können. Oftmals kann man mit solchen Schreibweisen auch recht gut „arbeiten". Dennoch aber: „Grammatikalisch" richtig sind sie nicht, und das ist zu wissen.

Aus diesen Gründen gelten auch alle Rechengesetze nur für nicht-negative Radikanden, wie z.B. die Regel $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ und alle die anderen. Das gleiche gilt für die Zusatzdefinition $\sqrt[1]{a} = a$ und für die Schreibweise $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Wir *rekapitulieren:* $\sqrt[3]{(-8)}$ ist nicht definiert, die Gleichung $\sqrt[3]{-8} = -2$ ist daher sinnlos, und es ergeben sich keinerlei weitere Probleme beim Rechnen. Allgemein: Für $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ die nicht-negative (reelle) Lösung von $x^n - a = 0$. Daß es für jedes reelle $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ eine und nur eine solche gibt, ist natürlich das „Hauptproblem". Damit werden wir uns gleich auseinandersetzen, wir werden dann auch sehen, welche Voraussetzungen man eigentlich braucht und welche Rolle insbesondere die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ spielt. Für $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) kann die Gleichung $x^n - a = 0$ auch für negative a eine reelle Lösung haben, für diese darf aus unserer Sicht aber nicht $\sqrt[n]{a}$ geschrieben werden (z.B. $x^3 + 8 = 0 \to x = -2$, aber nicht $\sqrt[3]{-8} = -2$). Freilich könnte man für negatives a und ungerades $n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ definieren. Das aber nur um den Preis, daß dann eben die „klassischen" Rechenregeln nicht mehr uneingeschränkt gelten. ($\sqrt[3]{-2}$ wäre dann $-\sqrt[3]{2}$, aber die Regel $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}$ dürfte eben nicht angewendet werden.) Ausnahmen und Aufklärungsbedarf bei „Ungereimtheiten" ähnlich wie am Anfang beschrieben wären die Folge, und es wäre nicht im Einklang mit der üblichen „Mathematik".

Nun aber endlich zum *Wesentlichen* dieses Vortrages: ob und wann „n-te Wurzeln" überhaupt existieren. Darin liegt natürlich das Wesentliche, wenn es auch wahrscheinlich für den MU einfach zu schwierig — aber auch gar nicht sinnvoll — ist. Für uns Lehrer gilt aber auch hier der zwar nur umgangssprachlich formulierte, aber doch sehr aussagereiche Satz: Die Güte des Unterrichts erwächst auch aus dem, was der Lehrende *bewußt* wegläßt. Auf diesem dann souveränen Hintergrund wird in der Regel dann ganz einfach, wenn auch treffsicher erklärt. Das Hintergrundwissen, das andererseits gerade in didaktischen Artikeln auch oft mißbraucht wird, schlägt in jedem Fall durch.

Bei der Einführung der Quadratwurzeln in der 4. Klasse wird im Grunde das Symbol $\sqrt{a}$ definiert, ohne geklärt zu haben, ob und für welche a das eigentlich existiert. Es ist aber didaktisch auch ganz richtig, sich hier einfach auf konkrete Beispiele zu verlassen (eventuell auch auf die Werte, die der TR „liefert"). Wichtig ist ganz allgemein, daß Probleme erst aus dem konkreten Handeln und Rechnen herausgeschält werden (daß die Sachen nicht zu früh „madig" gemacht werden, wie — glaube ich — einmal *A. Kirsch* gesagt hat).

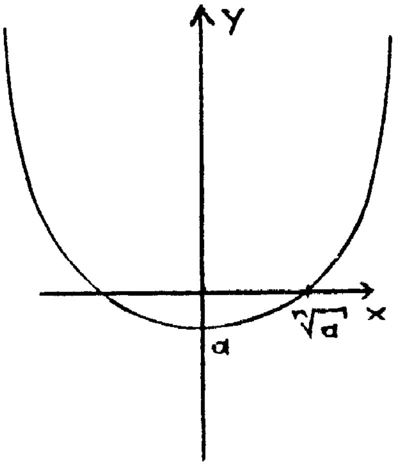
Auf das Folgende könnte man aber eventuell — je nach Klasse und eigener Freude an der Sache — in der 6. Klasse eingehen, wenn die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ am Programm steht. Dies sieht der Lehrplan vor und kann natürlich in verschiedenster Weise „abgedient" werden. (Eine — glaube ich — sehr schöne Sichtweise findet sich in [RMHL6], wo von numerischen Problemen mit periodischen Zahlen ausgegangen wird.) — Nun aber genug der Abschweifung, zum eigentlichen Thema!

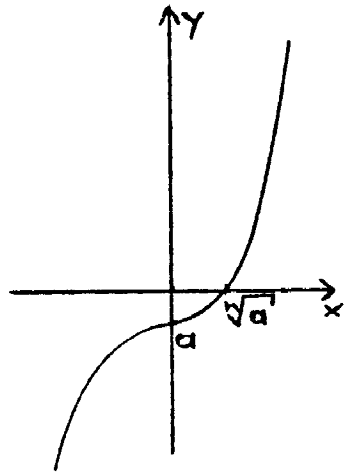
C. Voraussetzungen, Existenz und korrekte Definition von $\sqrt[n]{a}$.

Satz. *Für jedes reelle $a \geq 0$ und $n = 1, 2, 3, \ldots$ hat die Gleichung $x^n - a = 0$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$.*

DEFINITION. Diese Zahl x heißt $\sqrt[n]{a}$.

Bevor wir uns den *Beweis* des Satzes ansehen und die Voraussetzungen, die mehr oder minder versteckt eingehen, sehen wir uns die Behauptung *geometrisch veranschaulicht* an. Da scheint die Sache ganz klar zu sein:





Verlauf von $y = x^n - a$ bei geradem n ...bei ungeradem n

Mit der Zeichnung ist aber freilich nichts bewiesen, die Voraussetzungen sind hier alle versteckt (insbesondere die Vollständigkeit u.a.m.; s. weiter unten). Für den *Beweis* des Satzes dürfen wir nur die Definition und die ao. abgeleiteten Eigenschaften der reellen Zahlen verwenden. Und das soll jetzt geschehen. Zunächst stellen wir die im Beweis verwendeten *Voraussetzungen* zusammen, und es wäre schön, bei der Lektüre zu prüfen, wo und wie diese dann eingehen. Eine ebenso interessante Aufgabe wäre es herauszufinden, ob und wie man gewisse der verwendeten Voraussetzungen vermeiden könnte. Das ist schwierig und wird hier nicht geschehen. Nur so viel: um das Maß an Komplexität, das die Voraussetzungen ausdrücken, kommt man nicht herum (das ist — bei einem guten Beweis — wie beim Energieerhaltungssatz). Im folgenden Satz wird nichts — etwa aus Bequemlichkeit oder „Vereinfachungsgründen" — verwendet, das der Sache nicht „wesensmäßig angepaßt" ist. Freilich kann man die Voraussetzungen in äquivalenter Form, aber eben anders anschreiben. Der Beweis bekommt dann eine formal andere Gestalt, der „Grad seiner Komplexität" sozusagen bleibt aber erhalten.

Folgende Voraussetzungen über den Körper der reellen Zahlen werden verwendet werden: (Bei der Vollständigkeit geben wir einige äquivalente Bedingungen an, die Sie natürlich alle kennen. Wir wiederholen sie, um die „Tiefe" dieser Voraussetzung auch hier nochmals zu dokumentieren. Verwenden werden wir allerdings — wie übrigens auch explizit in [RMHL6] — nur die Formulierung (4).)

V1: Der (angeordnete) Körper der reellen Zahlen ist *vollständig*. Dies wird durch jede der folgenden paarweise äquivalenten Aussagen ausgedrückt:

(1) Jede *Intervallschachtelung* hat einen innersten Punkt ([LHRLG4], p. 31 ff.).

(2) Es gilt das *Cauchysche Konvergenzkriterium* für Folgen $\langle x_n \rangle$: $\langle x_n \rangle$ konvergiert genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index n existiert, sodaß für alle $k, l > n$ gilt: $|x_k - x_l| < \varepsilon$. (Man kann es einer Folge also „ansehen", ob sie

konvergiert, auch wenn man keine Vermutung (Kenntnis) über den (prospektiven) Grenzwert hat.[2]) Für die rationalen Zahlen gilt das natürlich nicht, man denke etwa an eine (z.B. durch Intervallschachtelung definierte) Folge rationaler Zahlen, die in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert (von $\sqrt{2}$ wissen wir, daß sie irrational ist [LHRLG4]).

(3) Jede nach oben (unten) beschränkte *Folge* $\langle x_n \rangle$ besitzt eine kleinste obere bzw. größte untere Schranke, das Supremum bzw. Infimum der Folge. — Das benützen wir sehr oft bei der Arbeit mit Folgen (s. z.B. [RMHL6], p. 200 ff.).

(4) Jede nach oben (unten) beschränkte *Menge* M $(\neq \emptyset) \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere bzw. größte untere Schranke, das sog. Supremum bzw. Infimum der Menge M. In $\mathbb{Q}$, dem Körper der *rationalen* Zahlen, besitzt z.B. die Menge $\{x|x^2 < 32\}$ keine kleinste obere Schranke. Dieses Supremum müßte ja gerade $\sqrt{32}$ sein, und diese reelle Zahl ist nicht rational, wie wir oben gesehen haben. Daß in $\mathbb{R}$ wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ derartige Mengen M sehr wohl jeweils ein sup besitzen, ist ein wesentlicher Teil unseres Beweises (siehe unten!).

(5) Jede *stetige reelle Funktion* f auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, für die $f(a)$ und $f(b)$ verschiedenes Vorzeichen haben, besitzt (mindestens) eine Nullstelle $x_0 \in [a, b]$. (Diesen intuitiv leicht verständlichen „Nullstellensatz" — ein Spezialfall des sog. „Zwischenwertsatzes", wie wir wissen — haben wir z.B. in [RMHL6] benützt, um näherungsweise Nullstellen zu berechnen; *danach* haben wir aus der „theoretischen Analyse" dieses Satzes den Stetigkeitsbegriff herausgeschält. Dieser ist ja lehrplanmäßig in der 6. Klasse (je nach Klasse und eigener Vorliebe) mehr oder minder eingehend zu behandeln.)

(6) $\mathbb{R}$ ist der größte angeordnete Körper, der das sog. *Archimedische Axiom* erfüllt, d.h.: für je zwei Zahlen a und b, $b > a > 0$, gibt es eine natürliche Zahl n mit $n \cdot a > b$. (M.a.W.: $\mathbb{R}$ enthält jeden solchen Körper als Unterkörper (bzw. eine hiezu isomorphe Kopie).)

Es gibt noch andere äquivalente Formulierungen[3], sie spielen aber — wie bereits die Aussage (6) — im MU kaum eine Rolle.

V 2: *Der binomische Lehrsatz:* $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

V 3: *Die Bernoullische Ungleichung:* Für jedes natürliche $n \geq 2$ und für alle von 0 verschiedenen $x > -1$ gilt: $(1+x)^n > 1 + nx$ (Bew. d. Vollst. Indukt.). (Wichtig ist es, sich diese Ungleichung für verschiedene Werte von x und n zu veranschaulichen. Warum folgt sie nicht ohne weiteres aus dem Binomischen Lehrsatz?)

V 4: *Potenzieren einer Ungleichung:* Wenn $0 < x < y$ und n eine natürliche Zahl > 0 ist, dann ist $x^n < y^n$.

Beweis: (Vollst. Ind.) (1) $n = 2 : x < y \rightarrow xx < xy < yy$, da x und $y > 0$.
(2) $x^{n+1} = x \cdot x^n < x \cdot y^n < y \cdot y^n = y^{n+1}$. — Wzzw.

---

[2] Die Zahlengerade besitzt keine „Löcher", die reellen Zahlen füllen sie „vollständig" aus.

[3] Siehe z.B. [AR] oder H.G. Steiner: Äquivalente Fassungen des Vollständigkeitsaxioms für $\mathbb{R}$; Math. Semesterberichte 13 (1966), 180–201.

V 5: Zur Erinnerung: *die Supremumseigenschaft:* Für $M \subset \mathbb{R}$ bedeutet „x ist sup M":
(1) für jedes $y \in M$ ist $y < x$, und
(2) für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $z \in M$ mit $z > x - \varepsilon$.

All dies berücksichtigend beginnen wir nun den *Beweis unseres Satzes*, wobei es natürlich genügt, $a > 0$ und $n > 1$ zu betrachten.

I. *Eindeutigkeit* der Lösung von $x^n - a = 0$ (falls es solche Zahlen x gibt): Wenn $x_1 < x_2$, beide größer null und $x_1^n - a = 0 = x_2^n - a$, dann folgt nach V4: $x_1^n < x_2^n$, also $x_1^n - a < x_2^n - a$, ein Widerspruch!

II. *Existenz* einer positiven Lösung von $x^n - a = 0$, wenn $a > 0$:

Sei $a > 0$ beliebig, z.z.: es gibt ein $x > 0$ mit $x^n = a$. Hiezu betrachten wir die Menge $M = \{y/y \geq 0 \text{ und } y^n \leq a\}$. Diese Menge ist nicht leer, da sie jedenfalls 0 enthält und sie ist nach oben beschränkt:

$y^n \leq a < na + 1$ (weil $a > 0$) $< (1+a)^n$ (wegen V 3). Aus $y^n < (1+a)^n$ folgt aber $y < 1 + a$, da für $y \geq 1 + a$ auch $y^n \geq (1+a)^n > 1 + na > a$ gelten würde.

Nach V 1 besitzt daher M ein Supremum und dieses nennen wir x: $x := \sup M$. Für dieses x behaupten wir nun, daß $x^n = a$ ist. x wäre also die gesuchte Lösung von $x^n - a = 0$. Dies aber beweisen wir nun indirekt, indem wir $x^n < a$ (1. Fall) und $x^n > a$ (2. Fall) jeweils auf einen Widerspruch führen. Somit bleibt dann nur $x^n = a$ und wir sind fertig.

1. Fall: $x^n < a$: Für jede natürliche Zahl $k > 1$ und $n \geq 2$ gilt:

$$(x + \frac{1}{k})^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \frac{1}{k} + \binom{n}{2} x^{n-2} \frac{1}{k^2} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{k^n}$$

und wegen $\frac{1}{k} < 1$ folgt $\frac{1}{k^i} < \frac{1}{k}$, sodaß

$$(x + \frac{1}{k})^n \leq x^n + \frac{1}{k} \underbrace{\left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\right]}_{=:A\ (>0,\ \text{weil } x>0)} . \qquad (*)$$

Ferner folgt aus $x^n < a$: $\frac{a-x^n}{A} > 0$. Das aber heißt, daß eine natürliche Zahl m existiert mit $\frac{1}{m} < \frac{a-x^n}{A}$. Das ist gleichbedeutend mit $x^n + \frac{A}{m} < a$. Da $(*)$ nun aber *für alle* $k > 1$ gilt, folgt insbesondere $(x + \frac{1}{m})^n \leq x^n + \frac{A}{m} < a$. Nun war aber $x = \sup\{y/y^n \leq a\}$, es kann also nicht $(x + \frac{1}{m})^n < a$ gelten. Ein Widerspruch!

2. Fall: $x^n > a$: Für jede natürliche Zahl k mit $k > \frac{1}{x}$ gilt $\frac{1}{k} < x$ und daher $\frac{1}{kx} < 1$. M.a.W.: $-\frac{1}{kx} > -1$. Die Bernoullische Ungleichung (V 3) liefert also für $n \geq 2$: $(1 - \frac{1}{kx})^n > 1 - \frac{n}{kx}$, und also auch

$$(x - \frac{1}{k})^n = x^n(1 - \frac{1}{kx})^n > x^n(1 - \frac{n}{kx}). \qquad (**)$$

Wenn wir zeigen könnten: es gibt ein $m > 0, m \in \mathbb{N}$, mit $(x - \frac{1}{m})^n > a$, dann wären wir fertig, denn dann wäre x nicht das $\sup\{y/y^n \leq a\}$, ein Widerspruch zur Definition von x. Wenn nun für ein bestimmtes k der Ausdruck $(**)$ größer als a ist, könnten wir dieses k als m verwenden. Wann also ist der Ausdruck (**) $> a$? Nun, genau dann, wenn $\frac{kx-n}{kx} > \frac{a}{x^n}$ ist. Gleichbedeutend: $kx^{n+1} - nx^n > kx \cdot a \leftrightarrow k > \frac{nx^n}{x(x^n-a)}$. Nun ist aber der Nenner hier laut Voraussetzung größer als 0, und es gibt ein solches $k \in \mathbb{N}$, das überdies noch $k > \frac{1}{x}$ erfüllt, wie wir es brauchen. Nennen wir dieses k gleich m und wir erhalten klarerweise $(x - \frac{1}{m})^n > a$. Fertig, denn wegen $x = \sup M = \sup\{y/y^n \leq a\}$ (vgl. V5!) gibt es zu diesem m ein $z \in M$ mit $z > (x - \frac{1}{m})$. Daraus aber folgt (V4!) $(x - \frac{1}{m})^n < z^n \leq a$ (weil ja $z \in M$).

Fassen wir zusammen: die intuitiv offenbar so klare Tatsache, daß $x^n - a = 0$ für $a > 0$ genau eine Lösung $x > 0$ hat, ist relativ tiefliegend. Rein geometrisch scheint ebenfalls alles selbstverständlich zu sein. (Überlegen Sie bitte, *wie* da die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ eingeht, bzw. überspielt wird!) In der einen oder anderen Formulierung ist jedenfalls die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ dafür nötig. — Noch komplizierter wird es, wenn wir nach komplexen Lösungen der Gleichung $x^n - a = 0$ fragen. $\mathbb{C}$ ist ja auch vollständig, sodaß durchaus ein „komplexes Analog" zu dem obigen Satz zu erwarten wäre.[4] Komplexe Zahlen stehen am lehrplanmäßigen Programm der 7. Klasse und da sollte man unbedingt auf „Wurzeln im Komplexen" eingehen. Die Behandlung der (z.B.) n-ten Einheitswurzeln gehört zum Schönsten, was der MU bieten kann. (Siehe z.B. [RMHL7], p. 32 ff.)

D. Komplexe Wurzeln reeller und komplexer Zahlen.

Im Reellen haben wir also für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine *eindeutige Wurzelfunktion*, deren maximaler Definitionsbereich die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen ist: $f : x \to \sqrt[n]{x}$. Diese Funktion besitzt die folgende „Homomorphieeigenschaft":
$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$; konkret: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ (eine Art „primäre" Rechenregel).
Kann man nun auch auf $\mathbb{C}$ eine solche Wurzelfunktion definieren, m.a.W.: kann man die reelle Wurzelfunktion unter Erhaltung dieser Homomorphieeigenschaft auf $\mathbb{C}$ fortsetzen?

Die Antwort heißt *„nein"*, aber sehen wir uns das genauer an! Zunächst einmal entstammt das eingangs gestellte Problem

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = 1$$

genau diesem „Dunstkreis". Es entsteht ja sozusagen, wenn man die komplexe Zahl i in die Homomorphieeigenschaft einsetzt.

Daß die erwähnte Fortsetzung der reellen Wurzelfunktion mit der gewünschten Homomorphieeigenschaft nicht gelingen kann, liegt nicht etwa an einer bloß ungeschickten Festsetzung der Wurzelwerte, sondern ist in der Struktur von $\mathbb{C}$ begründet. Das sieht man sehr leicht ein (wir betrachten nur Quadratwurzeln):

Eine „vernünftige" Wurzelfunktion $f : z \to \sqrt{z}$ müßte wohl jedenfalls die beiden folgenden Eigenschaften erfüllen:

(1) $f(z)^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und die sogenannte „Homomorphieeigenschaft"
(2) $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

[4] Beachte aber, daß $\mathbb{C}$ nicht mit einer algebraisch verträglichen Ordnung versehen werden kann, die auf dem Unterkörper $\mathbb{R}$ die dort bereits vorhandene Ordnung induzieren würde (Aufgabe 33 in [RMHL7]).

Und eben solche Funktionen kann es im Komplexen nicht geben, was aus dem folgenden Satz folgt:

Satz. *Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die die beiden Eigenschaften (1) und (2) erfüllt.*

BEWEIS. Erstens müßte $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) = f(1)^2 = 1$ sein. Daraus aber folgt: $f(-1) \cdot f(-1) = f((-1) \cdot (-1)) = f(1) = 1$. Andererseits aber müßte ja $f(-1) \cdot f(-1) = f(-1)^2 = -1$ sein. Insgesamt also ein Widerspruch.

Tatsächlich läßt sich keine „vernünftige" Wurzelfunktion im Komplexen einführen, es sei denn, man betrachtet *Riemannsche Flächen.*

Andererseits besitzt aber die Gleichung $z^2 - a = 0$ für jede komplexe Zahl $a \neq 0$ zwei Lösungen („Fundamentalsatz" der Algebra; s. z.B. [RMHL7], p. 16 ff.): z_1 und z_2. Diese beiden Zahlen kann man natürlich als „Quadratwurzeln" von $a \in \mathbb{C}$ bezeichnen. Insgesamt ist es höchst sinnvoll, (n-te) Wurzeln aus einer *anderen Sichtweise* zu sehen. Diese sei zum Abschluß kurz angeschnitten:

Wegen des „Fundamentalsatzes über Polynome" zerfällt das Polynom $x^n - z$ ($z \in \mathbb{C}$) in $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren, d.h.: es gibt komplexe Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ mit $x^n - z = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_n)$. Jede dieser komplexen Zahlen z_i nennt man einen „komplexen Wurzelwert" der komplexen Zahl z. Das Symbol $\sqrt[n]{z}$ bezeichnet nun die Menge aller Wurzelwerte von z : $\sqrt[n]{z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ (klar: $x^n = z$ genau dann, wenn $x = z_i$ für eines der $i, 1 \leq i \leq n$).

Wenn die komplexe Zahl z reell und positiv ist, dann ist genau eine der komplexen Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ reell und größer null. (Für dieses z_i gilt dann auch „im reellen Sinn" $\sqrt[n]{z} = z_i$.)

Für $z = 1$ ergibt sich aus dem Satz von Moivre ([RMHL7], p. 32):

$$\sqrt[n]{1} = \{z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n} / k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Diese z_k heißen die *n-ten Einheitswurzeln,* sie bilden die Eckpunkte desjenigen regelmäßigen n-Ecks auf dem Einheitskreis, dessen eine Ecke im Punkt $z = 1$ liegt (in der Gaußschen Zahlenebene).

Für die komplexe Zahl $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi), 0 \leq \varphi < 2\pi$, ergibt sich (ebenfalls aus dem Satz von Moivre):

$$\sqrt[n]{z} = \{ \sqrt[n]{|z|} \cdot (\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}) / k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

(Beachte, daß $\sqrt[n]{|z|}$ eindeutig reell und größer-gleich null ist!)

Für Weiteres und Genaueres siehe z.B. [AR], [EH], [RMHL7], u.a.

E. Historische Bemerkung über das Wurzelzeichen.

Das Zeichen $\sqrt{\ }$ stammt aus Wien. Erstmals in einem gedruckten Werk findet es sich nämlich in dem um 1520 weit verbreiteten Buch des Rechenmeisters Christoph RUDOLFF, der vor allem in Wien lebte und wirkte.

F. Schlußbemerkung.

Ein Lehrziel der 4. Klasse war es also zu erkennen, daß $\sqrt{k}$ stets irrational ist, wenn k eine natürliche Zahl ist, die nicht gerade eine Quadratzahl ist. Die Erkenntnis, das insbesondere $\sqrt{2}$ irrational ist, geht auf die Pythagoreer (5. Jh. v. Chr.) zurück. Sie erkannten nämlich, daß die Diagonale eines Quadrates nicht kommensurabel mit der Seitenlänge ist (analog beim regelmäßigen Fünfeck, dem „Logo" der Pythagoreer). Diese Entdeckung hatte kulturgeschichtlich bedeutende Auswirkungen (auch später noch). Siehe z.B. [RE] u.a. Darauf möchte ich aber hier naturgemäß nicht mehr eingehen. — Danke!

Literatur

[AR] Artmann, B., *Der Zahlbegriff*, Vandenhoeck-Rupprecht, Göttingen, 1983.

[EH] Ebbinghaus, H., Hermes, H. et al., *Zahlen*, Springer, Heidelberg u.a., 1983.

[HE] Heuser, H., *Lehrbuch der Analysis I, II*, Teubner, Stuttgart, 1982.

[LHRLG] Laub, J., Hruby, E., Reichel, H.-C., Litschauer, D., Groß, H., *Lehrbuch der Mathematik, Schulstufen 5 bis 8 (Bd. 1 bis 4)*, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1985 ff.

[RMHL] Reichel, H.-C., Müller, R., Hanisch, G., Laub, J., *Lehrbuch der Mathematik, Oberstufe (Schulstufen 9 bis 12, Bd. 5 bis 8)*, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1989 ff.

[RE] Reichel, H.-C., *Zum Realitätsproblem mathematischer Begriffe*, Das Realismusproblem; Oeser, E., Bonnet, E.M. (Hgb.), Verl. Österr. Staatsdruckerei, Wien, 1988.